RÈN LUYỆN TƯ DUY QUI NẠP CHO HỌC SINH.

* **Đặt vấn đề** :

Tư duy qui nạp thường xuất hiện trong toán học và trong cuộc sống hằng ngày. Nhằm rèn luyện cho các em có tư duy qui nạp khi nhìn nhận một vấn đề. Góp phần xây dựng năng lực tư duy lôgíc , diễn đạt suy nghĩ mạch lạc , suy luận có lí. Gây hứng thú cho học sinh tìm tòi , phát hiện , tranh luận khi vận dụng kiến thức toán học. Khi đọc bài viết các em nên cố gắng thực hiện theo thứ tự các hoạt động đề ra.

I. **Nguyên lí quy nạp toán học**.

Cho P(n) là một mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên dương. Nếu

✪ P(1) là mệnh đề đúng.

✪ Nếu P(k) đúng thì P(k+1) cũng đúng với mọi số tự nhiên k $\geq$ 1.

Thì mệnh đề P(n) đúng với mọi số tự nhiên dương n.

VD : Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có :

$$1.2+2.3+....+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad (*)$$

Bg:

✪ Khi n =1 (*) trở thành : $1.2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ đúng.

✪ Giả sử (*) đúng với n = k $\geq$ 1 tức là : $1.2+2.3+....+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

Khi đó ta có :

$$1.2+2.3+....+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Vậy (*) đúng với n = k + 1 nên theo nguyên lí quy nạp suy ra (*) đúng với mọi n$\in N^*$

* **Chú ý** :

Cần tuân thủ đúng các bước trong chứng minh. Nếu không rất dể dẩn đến sai lầm.

VD: **Sai lầm trong quy nạp**. Bỏ qua bước 1**.**

Chứng minh rằng : Mọi số tự nhiên dương đều bằng số liền sau nó .

Bg :

✪ Bỏ qua bước 1**.**

✪ Giả sử với n = k $\geq$ 1 ta có : k = k + 1

Khi đó ta dể dàng suy ra : k +1 = k + 2. Vậy mệnh đề đúng với n = k + 1 nên theo nguyên lí quy nạp suy ra mệnh đề đúng với mọi n$\in N^*$

Mọi số tự nhiên đều bằng số liền sau nó (*).

II. **Ứng dụng của phương pháp qui nạp**: ***Bài toán tính tổng*** :

VD: Chứng minh rằng : $1+3+5+..+(2n-1)=n^2 \quad , \quad \forall n\geq 1$

Bg : Các em tự thực hiện.

* **Phân tích bài toán**:

a. Tính tổng sau đây : 1 + 3 + 5 + …+ 99 = ?

b. Đặt : S_n = 1 + 3 + 5 + …+ (2n – 1)

Ta biểu thị : S_n theo n bằng cách tính các giá trị đặc biệt của S_n :

Ta có : $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$, $S_5 = 25$, ……

Khi đó ta lập bảng:

n	1	2	3	4	5
Sn	1	4	9	16	25

Từ bảng trên ta dự đoán mối liên hệ giữa : S_n và n là : $S_n = n^2$.

Dự đoán này đã được chứng minh bằng quy nạp ở trên.

VD: Cho : $P_n = 1 + 2 + .. + n$, $\forall n \geq 1$

a. Dự đoán P_n theo n.

b. Chứng minh dự đoán bằng quy nạp.

Bg:

a. $P_1 = 1$, $P_2 = 3$, $P_3 = 6$, $P_4 = 10$, $P_5 = 15$, $P_6 = 21$.

Khi đó ta lập bảng :

n	1	2	3	4	5	6
Pn	1	3	6	10	15	21

Từ bảng trên ta dự đoán mối liên hệ giữa : P_n và n là : $P_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

*** Giáo viên có thể nêu câu hỏi gợi ý để học sinh phát hiện mối liên hệ P_n và n :**

- Tích hai số liên tiếp ở hàng trên có quan hệ gì với số ở hàng dưới tương ứng.
- Lập tỷ số : $\frac{P_n}{n}$

b. Dự đoán này được chứng minh bằng quy nạp.

VD: Cho : $Q_n = 1^2 + 2^2 + .. + n^2$, $\forall n \geq 1$

a. Dự đoán Q_n theo n.

b. Chứng minh dự đoán bằng quy nạp.

Bg:

a. $Q_1 = 1$, $Q_2 = 5$, $Q_3 = 14$, $Q_4 = 30$, $Q_5 = 55$, $Q_6 = 91$.

Khi đó ta lập bảng :

n	1	2	3	4	5	6
Qn	1	5	14	30	55	91

Từ bảng trên rất khó để dự đoán : Q_n theo n nhưng Qn có mối liên hệ với bài toán trên nên trong bảng ta bổ sung thêm giá trị P_n.

n	1	2	3	4	5	6
Qn	1	5	14	30	55	91
Pn	1	3	6	10	15	21
Qn/Pn	3|3	5|3	7|3	9|3	11|3	13|3

Từ bảng trên ta dự đoán mối liên hệ giữa : Q_n và P_n là : $\frac{Q_n}{P_n} = \frac{2n+1}{3}$

Từ đây ta dự đoán : $Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

VD: Cho : $R_n = 1^3 + 2^3 + .. + n^3$, $\forall n \geq 1$

a. Dự đoán R_n theo n.

b. Chứng minh dự đoán bằng quy nạp. Dự đoán : $R_n = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

VD: Cho : $T_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 + .. + (-1)^n n^2$, $\forall n \geq 1$

a. Dự đoán T_n theo n.

b. Chứng minh dự đoán bằng quy nạp. Dự đoán : $T_n = (-1)^{n-1}.\dfrac{n(n+1)}{2}$

VD: Tính tổng $S_n = \dfrac{2}{1-a^2} + \dfrac{2}{1+a^2} + \dfrac{2^2}{1+a^{2^2}} + ... + \dfrac{2^n}{1+a^{2^n}}$ với | a | ≠ 1.

Bg: Số lượng số hạng của tổng là n + 1, trừ số hạng đầu tiên còn lại các số hạng khác đều có dạng : $\dfrac{2^k}{1+a^{2^k}}$, k = 1, 2, 3, …, n.

$$S_1 = \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} = \frac{2^2}{1-a^{2^2}}$$

Ta tính : $S_2 = S_1 + \dfrac{4}{1+a^4} = \dfrac{4}{1-a^4} + \dfrac{4}{1+a^4} = \dfrac{2^3}{1-a^{2^3}}$

$$S_3 = S_2 + \frac{2^3}{1+a^{2^3}} = \frac{2^3}{1-a^{2^2}} + \frac{2^3}{1+a^{2^2}} = \frac{2^3}{1+a^{2^3}}$$

Từ các biểu thức của S_1 , S_2 và S_3 có thể đưa ra giả thiết quy nạp $S_n = \dfrac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}}$

✪ Với n = 1, công thức (3) đúng như đã kiểm tra ở trên.

✪ Giả sử (3) đúng với n = k ≥ 1 nào đó. Khi đó $S_k = \dfrac{2^{k+1}}{1-a^{2^{k+1}}}$ Ta dể dàng chứng minh được : $S_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{1-a^{2^{n+2}}}$ Đẳng thức (3) đúng với n = k + 1.

Như vậy, từ nguyên lí quy nạp toán học đẳng thức (3) đúng với mọi n ≥ 1.

VD: Chứng minh rằng : $1 - 2 + 3 - 4 + .. - 2n + (2n+1) = n + 1$, $\forall n \geq 1$

VD: Chứng minh rằng :

$$1.2 + 2.5 + .. + n.(3n-1) = n^2(n+1) \quad , \quad \forall n \geq 1$$

VD: Cho : $A_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$

a. Dự đoán A_n theo n.

b. Chứng minh dự đoán bằng quy nạp. Dự đoán : $A_n = (n+1)! - 1$.